【論文】

超優先的選択および非定常状態におけるベキ乗則生成モデル

Power Law Model in Super Preferential Attachment and Nonstationary Condition

鈴木 武

ベキ乗則の生成モデルはいくつも提案されているが、代表的なものとして Simon（1955）および Barabasi & Albert (1999) が挙げられる。これらに共通していることは「優先的選択」を前提として、定常状態でベキ乗則を出現させることである。本論文【Ｉ】では、「超優先的選択」という概念を導入し、より広い条件でもベキ乗則が出現することを示す。【Ⅱ】では、非定常状態において、ベキ乗則がどのように出現するかを記述する。

【Ⅰ】超優先的選択モデル

（１）モデルの前提

ベキ乗則生成のモデルを考察する。（注１） そのために以下の前提をおく。対象とするシステムはいくつかのグループから構成されており、各グループの大きさは要素数で示される。グループの大きさxはm以上の自然数であり、$x \ge m \ge 1$である。初期状態でm以上の大きさをもつグループがa個存在し、大きさの合計をcとする。システムの初期状態において、グループは少なくとも１つ存在し、$a \ge 1$とする。

毎期 1 要素ずつシステムに参入する。参入にさいし、既存グループのどれかに所属する確率を$1-\alpha$とし、既存グループではなく新たに構成されるグループに参入する確率をαとする。ただし、グループの要素数はm以上であるので、新たなグループは要素数がmになるまでシステムには参入しないで待機しているものとする。システム外で待機している新たなグループは１つとする。$m=1$の場合には、新たなグループはすぐにシステムに参入することができる。

特定のグループがとる大きさの確率分布を考えよう。t時点において、第iグループが大きさxである確率を$P_i(x,t)$であらわす。t時点におけるグループの大きさはmから$t+c$までの範囲内にある。したがって

$$\sum_{x=m}^{t+c} P_i(x,t) = 1$$

である。

ここで２つの仮定を設けよう。

【仮定１】システムに参入する要素が既存のどのグループに所属するかは、各グループの大きさの$(1+\varepsilon)$乗に、すなわち$x^{1+\varepsilon}$に誘引されるものとする。

【仮定２】システムに参入する要素が既存グループではなく、新たなグループに所属する確率はαである。ただし$0 \le \alpha \le 1$。

仮定１を「超優先的選択」(super preferential attachment)と呼ぶことにし、このモデルを「超優先的選択モデル」と呼ぼう。$\varepsilon = 0$のとき、仮定１は「優先的選択」(preferential attachment)と呼ばれており、Simon (1955) が初めて提示した仮定である。

第iグループにおける時間経過による確率の変化をみよう。$(t-1)$時点からt時点にかけて大きさxがとる確率の変化は、$x > m$の場合、仮定１から

$$P_i(x,t) - P_i(x,t-1) = K(t-1)\{(x-1)^{1+\varepsilon} P_i(x-1,t-1) - x^{1+\varepsilon} P_i(x,t-1)\} \qquad (1\text{-}1)$$

である。ただし、$K(t-1)$は時間に依存する比例定数とする。

$x = m$の場合

$$P_i(m,t)-P_i(m,t-1)=\delta_i(t)-K(t-1)m^{1+\varepsilon}P_i(m,t-1) \tag{1-2}$$

ここで$\delta_i(t)$は第iグループがt時点でシステムに参入する確率である。

（２）モデルの解

(a) 期待度数

時間が経過し$t\to\infty$となったとき、システム全体として大きさxに関する確率分布がどのようになるか、(1-1)式、(1-2)式をもとに算出しよう。

t時点において大きさxを固定し、全グループの確率合計を求めると、t時点における大きさxの期待度数$f(x,t)$になる。

t時点におけるグループ数を$g(t)$としよう。初期状態においてグループはa個存在しているので、すべてのグループの大きさが1であるならば、グループ数は$t+a$になる。したがって可能なグループ数は$a\le g(t)\le t+a$である。それゆえ、t時点における大きさxの期待度数は

$$f(x,t)=\sum_{i=1}^{g(t)}P_i(x,t) \tag{1-3}$$

と表現される。また、期待度数を合計すると

$$\sum_{x=m}^{t+c}f(x,t)=\sum_{i=1}^{g(t)}\sum_{x=m}^{t+c}P_i(x,t)=g(t) \tag{1-4}$$

であり、グループ数に一致する。

(1-1)式をiで合計しよう。$(t-1)$時点においてt時点のものは実現していないので、その確率は0である。したがって、

$$\sum_{i=1}^{g(t)}P_i(x,t-1)=\sum_{i=1}^{g(t-1)}P_i(x,t-1)$$

である。(1-1)式をiで合計すると

$$\sum_{i=1}^{g(t)}P_i(x,t)-\sum_{i=1}^{g(t-1)}P_i(x,t-1)=K(t-1)\sum_{i=1}^{g(t-1)}\{(x-1)^{1+\varepsilon}P_i(x-1,t-1)-x^{1+\varepsilon}P_i(x,t-1)\}$$

よって

$$f(x,t)-f(x,t-1)=K(t-1)\{(x-1)^{1+\varepsilon}f(x-1,t-1)-x^{1+\varepsilon}f(x,t-1)\} \tag{1-5}$$

同様に(1-2)式についても

$$f(m,t)-f(m,t-1)=\sum_{i=1}^{g(t)}\delta_i(t)-K(t-1)m^{1+\varepsilon}f(m,t-1) \tag{1-6}$$

である。

$\sum_{i=1}^{g(t)}\delta_i(t)$は$t$時点においてシステムに新たなグループが参入する確率を意味する。新たなグループがシステムに参入するためには、要素数がm個に達していなければならない。m個

に達していない場合はシステム外で待機していると想定している。待機しているケースとしては、要素数が 0 個、1個、・・・、$(m-1)$ 個の m 通りの場合があり、各ケースの生じる確率は等しいと考えてよい。t 時点において要素が新たなグループに所属する確率は α であり、$(m-1)$ 個の要素がシステム外で待機している場合のみ、新たなグループがシステムに参入してくる。したがって、その確率は $\dfrac{\alpha}{m}$ となる。それゆえ(1-6)式は

$$f(m,t)-f(m,t-1)=\frac{\alpha}{m}-K(t-1)m^{1+\varepsilon}f(m,t-1) \qquad (1\text{-}7)$$

と書ける。

(b) グループ数についての仮定

相対度数を確率とする。その計算には度数の合計が必要である。本モデルではグループ数と期待度数の合計が一致するので、グループ数の具体的な表現を考察しよう。そこで、グループ数は参入する要素数に比例するという仮定を設けよう。すなわち、t 時点におけるグループ数 $g(t)$ は初期状態における a 個のグループ数と、要素数 t に比例する部分からなると仮定する。比例定数を k とすると

$$g(t)=kt+a \quad (0<k\le 1) \qquad (1\text{-}8)$$

と表される。

t 時点における大きさ x の期待相対度数、すなわち確率は

$$P(x,t)=\frac{f(x,t)}{g(t)}=\frac{f(x,t)}{kt+a} \qquad (1\text{-}9)$$

と表現される。

初期に存在していた要素を除き、t 時点までに t 個の要素がシステムに参入している。そのうち、新たなグループに所属する要素の期待割合は α である。グループを形成するためには m 個の要素が必要なので、t 時点におけるグループ数の期待値は、初期に存在しているのと合計して

$$g(t)=\frac{\alpha t}{m}+a$$

である。したがって、

$$k=\frac{\alpha}{m} \qquad (1\text{-}10)$$

(c) 比例定数の計算

比例定数 $K(t-1)$ を求めよう。$(t-1)$ 時点における全グループの要素数合計は $(t-1+c)$ である。ただし、新たなグループに所属するためシステムへの参入を待機している要素があるかもしれない。その数もここでは含めている。

グループの大きさはmから$(t-1+c)$までの可能性がある。該当する大きさがない場合には、その確率を0とする。

$K(t-1)x^{1+\varepsilon}f(x,t-1)$は第$t$要素がシステムに参入するとき、すでに$x$回生起しているグループのどれかに属する確率である。すべてのxについてその和をとると、第t要素が既存のどれかのグループに属する確率$(1-\alpha)$になるので

$$\sum_{x=m}^{t-1+c} K(t-1)x^{1+\varepsilon}f(x,t-1)=1-\alpha \tag{1-11}$$

$x^{1+\varepsilon}$をmでテーラー展開しよう。$x \ge m$であり、かなり大きな値である。また、εは小さな値と想定しているので、1次式で近似できる。（注2）

$$x^{1+\varepsilon} \cong m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(x-m)=-\varepsilon m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}x \tag{1-12}$$

(1-11)式、(1-12)式から

$$K(t-1)\left[-\varepsilon m^{1+\varepsilon}\sum_{x=m}^{t-1+c} f(x,t-1)+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}\sum_{x=m}^{t-1+c} xf(x,t-1)\right]=1-\alpha \tag{1-13}$$

また、すべての大きさを合計すると要素数全体の値になるから

$$\sum_{x=m}^{t-1+c} xf(x,t-1)=t-1+c \tag{1-14}$$

したがって、(1-13)式は(1-4)、(1-8)、(1-14)式から

$$K(t-1)\left[-\varepsilon m^{1+\varepsilon}\{k(t-1)+a\}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(t-1+c)\right]=1-\alpha \tag{1-15}$$

(1-15)式の[ ]は

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon m^{1+\varepsilon}\{k(t-1)+a\}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(t-1+c)\\
&\quad=-\varepsilon m^{1+\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{m}(t-1)+a\right)+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(t-1+c)\\
&\quad=m^{\varepsilon}(1+\varepsilon-\varepsilon\alpha)(t-1)+m^{\varepsilon}\left\{(1+\varepsilon)c-\varepsilon ma\right\}
\end{aligned}$$

(1-15)式から

$$K(t-1)=\frac{1}{m^{\varepsilon}}\cdot\frac{1-\alpha}{(1+\varepsilon-\varepsilon\alpha)(t-1)+(1+\varepsilon)c-\varepsilon ma} \tag{1-16}$$

である。

(d) 定常状態における確率

$t\to\infty$としたとき定常状態になると仮定して、大きさxの確率を求めよう。まず、(1-5)式を1次式で近似し、期待度数を確率に変形する。

$$
\begin{aligned}
&(kt+a)P(x,t)-\left\{k(t-1)+a\right\}P(x,t-1)\\
&=K(t-1)\left\{-\varepsilon m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(x-1)\right\}\left\{k(t-1)+a\right\}P(x-1,t-1)\\
&\quad -K(t-1)\left\{-\varepsilon m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}x\right\}\left\{k(t-1)+a\right\}P(x,t-1)
\end{aligned}
\tag{1-17}
$$

定常状態において、(1-17)式の

$$
\text{左辺}=(kt+a)P(x)-\left\{k(t-1)+a\right\}P(x)=kP(x)
$$

右辺の $K(t-1)$ に(1-16)式を代入し、分母・分子を $(t-1)$ で割って、$t\to\infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}&=\frac{1-\alpha}{m^{\varepsilon}}\cdot\frac{\left\{-\varepsilon m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(x-1)\right\}k}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(x-1)\\
&\quad-\frac{1-\alpha}{m^{\varepsilon}}\cdot\frac{\left\{-\varepsilon m^{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon)m^{\varepsilon}x\right\}k}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(x)\\
&=\frac{(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)(x-1)\right\}k}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(x-1)-\frac{(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)x\right\}k}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(x)
\end{aligned}
$$

式を整理すると

$$
\left[1+\frac{(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)x\right\}}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}\right]P(x)=\frac{(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)(x-1)\right\}}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(x-1)
$$

したがって

$$
P(x)=\frac{(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)(x-1)\right\}}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha+(1-\alpha)\left\{-\varepsilon m+(1+\varepsilon)x\right\}}P(x-1)
\tag{1-18}
$$

分母・分子を $(1+\varepsilon)$ で割り、$\beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$ を用いて(1-18)式を整理する。

$$
\begin{aligned}
P(x)&=\frac{\dfrac{1}{\beta}\left\{(x-1)-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m\right\}}{1-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)+\dfrac{1}{\beta}\left\{x-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m\right\}}P(x-1)\\
&=\frac{(x-1)-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{\beta-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta-1)+x-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}P(x-1)
\end{aligned}
$$

よって

$$P(x)=\frac{(x-1)-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{x+\beta-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)}P(x-1) \tag{1-19}$$

同様に(1-7)式を 1 次式で近似して変形する。

$$\begin{aligned}&(kt+a)P(m,t)-\left\{k(t-1)+a\right\}P(m,t-1)\\&\quad=\frac{\alpha}{m}-K(t-1)m^{1+\varepsilon}\left\{k(t-1)+a\right\}P(m,t-1)\end{aligned} \tag{1-20}$$

定常状態において、(1-20)式を整理する。

$$\text{左辺}=(kt+a)P(m)-\left\{k(t-1)+a\right\}P(m)=kP(m)$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\frac{\alpha}{m}-\frac{1-\alpha}{m^{\varepsilon}}\cdot\frac{m^{1+\varepsilon}k}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(m)\\&=\frac{\alpha}{m}-\frac{(1-\alpha)mk}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}P(m)\end{aligned}$$

右辺＝左辺で

$$k\left[1+\frac{(1-\alpha)m}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}\right]P(m)=\frac{\alpha}{m}$$

分母・分子を $(1+\varepsilon)$ で割り、$\beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$ を用いて式を整理する。

$$\begin{aligned}P(m)&=\frac{\dfrac{\alpha}{mk}}{\dfrac{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha+(1-\alpha)m}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}}=\frac{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha}{1+\varepsilon-\varepsilon\alpha+(1-\alpha)m}\\&=\frac{1+\varepsilon-\varepsilon\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)}{1+\varepsilon-\varepsilon\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)+\dfrac{m}{\beta}}=\frac{1+\dfrac{\varepsilon}{\beta}}{1+\dfrac{\varepsilon}{\beta}+\dfrac{m}{\beta}}\end{aligned}$$

したがって

$$P(m)=\frac{\beta+\varepsilon}{\beta+\varepsilon+m} \tag{1-21}$$

(e) 確率分布の計算

(1-19)式、(1-21)式から

$$P(x)=\frac{x-1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{x+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)}P(x-1)$$

$$=\frac{x-1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{x+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)}\times\frac{(x-1)-1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{(x-1)+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)}$$

$$\times\cdots\times\frac{(m+1)-1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m}{(m+1)+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)}P(m)$$

したがって

$$P(x)=\frac{\Gamma\left[x-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m\right]}{\Gamma\left[m-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m\right]}\cdot\frac{\Gamma\left[m+1+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)\right]}{\Gamma\left[x+1+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(m+\beta-1\right)\right]}\cdot\frac{\beta+\varepsilon}{m+\beta+\varepsilon} \qquad (1\text{-}22)$$

ここで、 $x=m,m+1,m+2,\cdots$ 　である。

(1-22)式を大きな値 m を単位にして、その極限の分布を求めよう。

$$m=\frac{1}{h}$$

$$x=\frac{y+1}{h} \qquad (y=0,h,2h,\cdots)$$

とする。

$m\to\infty$ 、すなわち $h\to 0$ の極限分布は(1-23)式を計算すればよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Gamma\left[\frac{y+1}{h}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{1}{h}\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{1}{h}\right]}\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{1}{h}+1+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{h}+\beta-1\right)\right]}{\Gamma\left[\frac{y+1}{h}+1+\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{h}+\beta-1\right)\right]}\cdot\frac{\beta+\varepsilon}{\frac{1}{h}+\beta+\varepsilon}\cdot\frac{1}{h}$$

(1-23)

得られる確率密度関数は(1-24)式である。

$$f(y)=(\beta+\varepsilon)\left\{(1+\varepsilon)y+1\right\}^{-\left\{\beta+1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta-1)\right\}} \qquad (y>0) \qquad (1\text{-}24)$$

(f) 確率密度関数を求める計算過程

【補助定理】

$$\frac{\Gamma\left(\frac{y+1-w}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-w}{h}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1-w}{h}+1+v\right)}{\Gamma\left(\frac{y+1-w}{h}+1+v\right)} \quad (y=0,h,2h,\cdots) \tag{1-25}$$

(1-25)式において $h\to 0$ とすると、

$$(1-w)^{1+v}(y+1-w)^{-(1+v)} \quad (y>0) \tag{1-26}$$

が得られる。

（証明） $y=0,h,2h,\cdots$ であるから、任意の y について(1-27)式が言える。

$$\frac{\Gamma\left(\frac{y+1-w}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-w}{h}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1-w}{h}+1+v\right)}{\Gamma\left(\frac{y+1-w}{h}+1+v\right)}=\prod_{i=1}^{\frac{y}{h}}\left(\frac{\frac{y+1-w}{h}-i}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-i}\right) \tag{1-27}$$

0 に近い h の場合、(1-27)式右辺のカッコ内の値は1に近い。（注３） x が1に近い場合

$$\log(x)\cong x-1$$

であるから（注４）、(1-27)式のカッコ中の対数は(1-28)式に近似できる。

$$\log\left(\frac{\frac{y+1-w}{h}-i}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-i}\right)\cong\frac{\frac{y+1-w}{h}-i}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-i}-1=\frac{-(1+v)}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-i} \tag{1-28}$$

h が 0 に近いので(1-27)式の右辺の対数をとり、それを積分で近似する。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\frac{y}{h}}\log\left(\frac{\frac{y+1-w}{h}-i}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-i}\right)&\cong\int_1^{\frac{y}{h}}\left(\frac{-(1+v)}{\frac{y+1-w}{h}+1+v-t}\right)dt\\
&=(1+v)\left[\log\left(\frac{y+1-w}{h}+1+v-t\right)\right]_1^{\frac{y}{h}}\\
&=(1+v)\log\frac{\frac{1-w}{h}+1+v}{\frac{y+1-w}{h}+v}\\
&=(1+v)\log\frac{1-w+h(1+v)}{y+1-w+hv}
\end{aligned}$$

ここで$h \to 0$とする。

$$(1+v)\log\frac{1-w}{y+1-w} \tag{1-29}$$

(1-29)式の対数を元の形になおすと

$$(1-w)^{1+v}(y+1-w)^{-(1+v)} \tag{1-30}$$

よって、証明された。

(1-23)式から(1-24)式を導くには、(1-25)式において

$$w=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\quad v=\beta-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta-1)$$

とおく。

$$1-w=\frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$1+v=\beta+1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta-1)$$

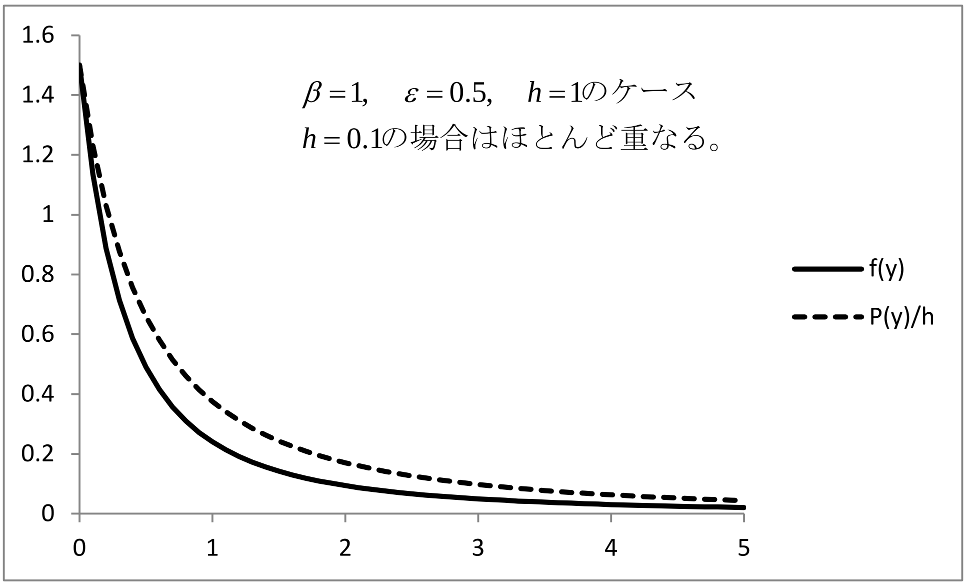
$$y+1-w=y+\frac{1}{1+\varepsilon}$$

したがって

$$(1-w)^{1+v}(y+1-w)^{-(1+v)}=\left\{(1+\varepsilon)y+1\right\}^{-\left\{\beta+1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta-1)\right\}}$$

であり、(1-24)式が導かれた。

ちなみに、(1-23)式が(1-24)式にどの程度近似されているか、グラフを描いてみた。図では$h=1$として、近似度がかなり悪いケースを描いた。$h=0.1$ではほとんど重なっている。hがさらに0に近づけば、近似度はより高くなる。



（３）ケースの検討

(a) 優先的選択モデル

$\varepsilon=0$ の場合に「優先的選択モデル」と呼ばれる。(1-24)式は

$$f(y)=\beta\left(y+1\right)^{-(\beta+1)} \qquad (y>0) \tag{1-31}$$

となり、パレート分布になる。このケースは多くの論文に記載されている。

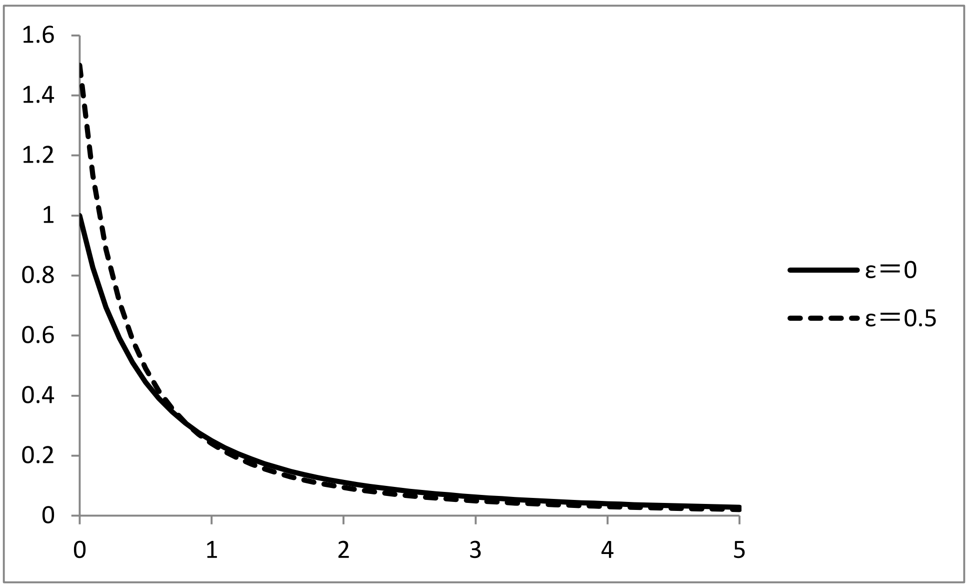
(b)ランダム・モデル

$\varepsilon\rightarrow -1$ の場合、【仮定１】は「システムに参入する要素が既存のどのグループに所属するかは、各グループすべて同じ確率である」と書き換えられる。(1-24)式を変形して

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow -1}(\beta+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{(1+\varepsilon)y}}\right)^{\frac{1}{(1+\varepsilon)y}\left\{-(\beta+1+2\varepsilon)y\right\}} = (\beta-1)e^{-(\beta-1)y} \qquad (\beta>1,\quad y>0) \tag{1-32}$$

であり、指数分布になる。

$\beta=1$ として、(1-31)式のグラフと、(1-24)式において $\varepsilon=0.5$ のグラフを以下に描いてみる。



（ｃ）超優先的選択モデル

(1-24)式をみると、超優先的選択のケースでもベキ乗則が生成されることが言える。従来の論文では、優先的選択を仮定してベキ乗則を導出するものが多かった。（注５） しかし、本論文で導入した「超優先的選択」の仮定の方がより一般的である。

優先的選択 $(\varepsilon = 0)$ の仮定と、それ以外の超優先的選択 $(\varepsilon \neq 0)$ の仮定の場合について、(1-24)式における確率密度関数のベキ指数の違いを考察しよう。

$\beta = 1$ のケースではベキ指数は $(\beta + 1)$ であり、$\varepsilon = 0$ の場合と同じになる。$\beta \neq 1$ のケースでは、$\varepsilon = 0$ と $\varepsilon \neq 0$ の場合で、ベキ指数は異なってくる。$\beta > 1$ が一般的であるので、そのケースで $\varepsilon > 0$ の場合をみよう。ベキ指数は $(\beta + 1)$ より小さくなる。

Albert & Barabasi (2002) の(TABLE Ⅱ)に記載されている WWW とインターネットの計測数を転記する。

ネットワーク	標本数	γ_{out}	γ_{in}	ε_{out}	ε_{in}	出典論文
WWW	325729	2.45	2.1	1.2	9	Albert, Jeong & Barabasi 1999
WWW	4×10^7	2.38	2.1	1.6	9	Kumar et al. 1999
WWW	2×10^8	2.72	2.1	0.4	9	Broder et al. 2000
Internet, domain	3015–4289	2.1–2.2	2.1–2.2	4–9	4–9	Faloutsos 1999
Internet, router	3888	2.48	2.48	1.1	1.1	Faloutsos 1999
Internet, router	150000	2.4	2.4	1.5	1.5	Govindan 2000

出典はAlbert & Barabasi (2002) TABLE Ⅱ 。ただし、ε_{out} ε_{in} の計算は筆者による。

仮定２で述べた「新たなグループに所属する確率」αは、WWW およびインターネットの場合には 0.5 である。したがって、$\beta = 2$になる。これを(1-24)式のベキ指数に代入してεを求めた。

$$\gamma = \beta + 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta - 1) \tag{1-33}$$

(1-33)式に$\beta = 2$を代入して変形すると

$$\varepsilon = \frac{3-\gamma}{\gamma - 2} \tag{1-34}$$

表における out は自分からつなぐネット数であり、in は相手からつながれるネット数である。また、表でのγは優先的選択モデルを仮定しているので、本論文の$(\beta + 1)$に相当し、本来は$\gamma = 3$である。しかし、推定結果は 3 よりもかなり小さいので、超優先的選択がなされている可能性がある。

(1-34)式に当てはめて計算したεの値は、9 というかなり大きいものがある。実際にはそれほど大きくないかもしれないが、ここでは超優先的選択がなされているということを述べておきたい。とくに、大きな WWW において、相手からつながれる in の場合には、自分からつなぐ out に比較してεはかなり大きな値を示している。これは実感に一致していると言える。

【Ⅱ】非定常状態におけるベキ乗則

（１）モデルの前提

【Ｉ】では、定常状態におけるベキ乗則生成のモデルを考察した。【Ⅱ】では、定常状態に達する以前に部分的に生じているベキ乗則について記述する。モデルの仮定は、【Ｉ】の【仮定１】において$\varepsilon = 0$として、優先的選択モデルを採用する。【仮定２】は同様に仮定する。

第iグループにおいて、$(t-1)$時点からt時点にかけて大きさxがとる確率の変化は、$x > m$の場合、(1-1)式に対応して

$$P_i(x,t) - P_i(x,t-1) = K(t-1)\{(x-1)P_i(x-1,t-1) - xP_i(x,t-1)\} \tag{2-1}$$

である。$K(t-1)$は時間に依存する比例定数とする。

$x = m$の場合

$$P_i(m,t) - P_i(m,t-1) = \delta_i(t) - K(t-1)mP_i(m,t-1) \tag{2-2}$$

（２）モデルの解

期待度数の表現は【Ｉ】と同様であり、(1-5)式に対応するのは

$$f(x,t) - f(x,t-1) = K(t-1)\{(x-1)f(x-1,t-1) - xf(x,t-1)\} \tag{2-3}$$

(1-7)式に対応するのが

$$f(m,t) - f(m,t-1) = \frac{\alpha}{m} - K(t-1)mf(m,t-1) \tag{2-4}$$

である。

「グループ数についての仮定」、および「比例定数の計算」も【Ｉ】と同様である。(1-9)式は

$$P(x,t) = \frac{f(x,t)}{kt+a} \tag{2-5}$$

(1-16)式に対応するのは

$$K(t-1) = \frac{1-\alpha}{t-1+c} \tag{2-6}$$

になる。(2-5)式、(2-6)式を(2-3)式に代入し、両辺をkで割ると

$$\begin{aligned}&\left(t+\frac{a}{k}\right)P(x,t) - \left(t-1+\frac{a}{k}\right)P(x,t-1)\\ &\quad = (1-\alpha)\frac{t-1+\dfrac{a}{k}}{t-1+c}\left\{(x-1)P(x-1,t-1) - xP(x,t-1)\right\}\end{aligned} \tag{2-7}$$

t が大きな値のとき、$\dfrac{t-1+\dfrac{a}{k}}{t-1+c} \cong 1$ とみなしてよい。したがって、(2-7)式は

$$\begin{aligned}&\left(t+\frac{a}{k}\right)P(x,t)-\left(t+\frac{a}{k}\right)P(x,t-1)\\&\quad=(1-\alpha)\left\{(x-1)P(x-1,t-1)-xP(x,t-1)\right\}-P(x,t-1)\end{aligned} \tag{2-8}$$

となる。

定常状態になれば、確率分布は変化しなくなるので、任意の x について

$$P(x,t)=P(x,t-1) \tag{2-9}$$

である。(2-8)式より

$$P(x)=\frac{(1-\alpha)(x-1)}{1+(1-\alpha)x}P(x-1)=\frac{x-1}{x+\dfrac{1}{1-\alpha}}P(x-1) \tag{2-10}$$

ここで

$$\beta=\frac{1}{1-\alpha} \tag{2-11}$$

とおくと、(2-10)式は

$$P(x)=\frac{x-1}{x+\beta}P(x-1) \tag{2-12}$$

(2-4)式は【Ｉ】と同様の手続きで、(1-21)式に対応して

$$P(m)=\frac{\beta}{\beta+m} \tag{2-13}$$

確率密度関数を求めるために

$$m=\frac{1}{h} \quad x=\frac{y+1}{h} \quad (y=0,h,2h,\cdots)$$

とおき、$m\to\infty$、すなわち $h\to 0$ の極限分布を求める。計算結果は(1-24)式に対応して

$$f(y)=\beta\left(y+1\right)^{-\beta-1} \quad (y>0) \tag{2-14}$$

が得られる。

x の確率密度関数に翻訳すると

$$\begin{aligned}f(y)dy&=\beta(y+1)^{-\beta-1}dy\\&=\beta m^{\beta}x^{-\beta-1}dx=g(x)dx\end{aligned} \tag{2-15}$$

になる。

（３）非定常におけるベキ乗則

非定常状態では、任意の x について(2-9)式が成立しているわけではないので、一般的に

$$P(x,t) \neq P(x,t-1) \tag{2-16}$$

である。ケースとしては、$P(x,t) > P(x,t-1)$ および $P(x,t) < P(x,t-1)$ が想定される。イメージとして、日本の都市人口分布を例に挙げよう。人口が小さな市町村から大きな都市へ移動していると考えられる。大きな都市の数が増えるので、その確率密度は大きくなる。したがって、$P(x,t) > P(x,t-1)$ が成り立つであろう。また、人口が減少しつつある市町村群では、$P(x,t) < P(x,t-1)$ が成り立つ。このような場合、ベキ指数がどのようになるかを考察する。

「(２) モデルの解」では、(2-10)式、(2-13)式を用い、(2-11)式と定義することによって(2-15)式を導いている。ここでは不等号式からベキ指数がどうなるかを考察するために、(2-10)式および(2-15)式を用いて(2-11)式を導くことにする。

(2-10)式から

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{(1-\alpha)(x-1)}{1+(1-\alpha)x} \tag{2-17}$$

これを変形して

$$\frac{P(x)-P(x-1)}{P(x-1)} = \frac{\alpha-2}{1+(1-\alpha)x} \tag{2-18}$$

(2-18)式左辺の分子は、x が変化したときの確率密度 P の変化の大きさであり、分母は確率密度である。微分で表現すれば、左辺は

$$\frac{dP/dx}{P}$$

である。これを弾力性の式に変形しよう。

$$\frac{dP}{P}\cdot\frac{x}{dx} = \frac{(\alpha-2)x}{1+(1-\alpha)x} \cong \frac{\alpha-2}{1-\alpha} \tag{2-19}$$

(2-15)式から、x の確率密度関数は $g(x) = \beta m^{\beta} x^{-\beta-1}$ であるので、弾力性は

$$-\beta-1 = \frac{\alpha-2}{1-\alpha} \tag{2-20}$$

したがって

$$\beta = \frac{1}{1-\alpha} \tag{2-21}$$

となる。(注６)

$P(x,t) > P(x,t-1)$ のケースでは、(2-8)式から

$$(1-\alpha)\left\{(x-1)P(x-1,t-1) - xP(x,t-1)\right\} - P(x,t-1) > 0 \tag{2-22}$$

したがって

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} < \frac{(1-\alpha)(x-1)}{1+(1-\alpha)x} \qquad (2\text{-}23)$$

(2-20)式に対応するのは

$$-\beta - 1 < \frac{\alpha - 2}{1-\alpha}$$

(2-21)式に対応するのは

$$\beta > \frac{1}{1-\alpha} \qquad (2\text{-}24)$$

である。

$P(x,t) < P(x,t-1)$ のケースでは

$$\beta < \frac{1}{1-\alpha} \qquad (2\text{-}25)$$

になる。（注７）

（４）都市人口の順位別 β 値

日本とアメリカ合衆国について、都市人口のベキ指数を求めよう。一般的に、人口分布についてはベキ乗則が成立すると言われている。それが成り立つなら、新たに追加される人口は既存の市町村以外に属することはないので、$\alpha = 0$ であり、したがって $\beta = 1$ となる。

データから β を推定するために、都市人口を大きい方から小さい方に並べ、順位をつける。(2-15)式を以下のように変形しよう。

$$P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \beta m^{\beta} t^{-\beta-1} dt = m^{\beta} x^{-\beta} \qquad (2\text{-}26)$$

したがって

$$\log(\text{都市順位}) = \beta \log m - \beta \log(\text{都市人口}) \qquad (2\text{-}27)$$

として、回帰分析から β を求めることができる。

2010 年センサスから、日本とアメリカ合衆国の β を計算した。結果は人口順位グループによって異なっている。日本のデータは 2010 年国勢調査による。市町村人口は平成大合併以前の区分が実情をより反映していると考えられるので、それを用いた。人口集中地区データは旧区分が明瞭でないので、2010 年時点の区分を用いている。

（表）2010年国勢調査による都市人口順位別のβ値

市町村人口		人口集中地区	
都市順位	β	都市順位	β
1～14	1.20	1～15	1.19
15～35	1.99	16～40	1.57
36～100	1.45	41～100	1.38
101～440	1.06	101～130	1.00
441～2500	0.71	131～300	0.89
2501～3233	0.11	301～829	0.43

市町村人口は2010年の値であるが、平成大合併前
の旧区分を用いた。
人口集中地区の値は2010年の区分を用いた。

アメリカ合衆国のデータは 2010 年 Census である。都市圏データの方がより適切であると考えられるので、Core Based Statistical Areas の人口を用いた。

（表）アメリカ合衆国　2010年都市圏人口順位別のβ値

都市圏順位	β
1～15	1.64
16～40	1.21
41～100	0.97
101～250	0.75
251～700	0.68
701～917	0.27

Census 2010 of the United States of America
The 917 Core Based Statistical Areas

表から言えることは、大都市あるいはそれに準ずる都市群ではベキ指数が 1 より大きい。中都市では 1 であり、小都市あるいは零細都市では 1 以下である。

この現象の解釈は、(2-16)式で示したように、「都市人口の分布が定常状態に達していない」からである。人口が小さな都市から大きな都市に移動している過程とみなせる。したがって、大きな人口の都市数が増えて、その都市密度が増加している。逆に、小さな人口の都市数が減って、その都市密度が減少しているからである。

【注】

（１） 超優先的選択モデルは、鈴木武（2007）における仮定１を拡張したものである。すなわち、「各グループの大きさに誘引される」という部分を、「各グループの大きさの$(1+\varepsilon)$乗に誘引される」と拡張している。鈴木武（2007）はSimon (1955）のモデルを精緻化したものである。

（２）

(1-12)式 $x^{1+\varepsilon} \cong m^{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)m^{\varepsilon}(x-m)$ の近似度

$\varepsilon = 1$のケース

x	m	① $x^{1+\varepsilon}$	② 一次近似式	②／①
2	1	4	3	0.7500
11	10	121	120	0.9917
101	100	10201	10200	0.9999
1001	1000	1002001	1002000	1.0000
10001	10000	100020001	100020000	1.0000
100001	100000	10000200001	10000200000	1.0000

$\varepsilon = 5$ のケース

x	m	① $x^{1+\varepsilon}$	② 一次近似式	②／①
2	1	64	7	0.1094
11	10	1.771561×10^{6}	1.6×10^{6}	0.9032
101	100	$1.061520150601 \times 10^{12}$	1.06×10^{12}	0.9986
1001	1000	$1.00060015002 \times 10^{18}$	1.006×10^{18}	1.0000
10001	10000	$1.00060015002 \times 10^{24}$	1.0006×10^{24}	1.0000
100001	100000	$1.00060015002 \times 10^{30}$	1.00006×10^{30}	1.0000

（３）

ケースの例として

$\beta = 2, \quad \varepsilon = 1$　すなわち　$w = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2}, \quad v = \beta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\beta - 1) = \frac{3}{2}$

$y = 10$ の場合について(1−27)式の右辺カッコ内の値を計算する。

i	h			
	0.1	0.01	0.001	0.0001
1	1.00483	1.00048	1.00005	1.00000
10	1.00529	1.00048	1.00005	1.00000
100	1.11111	1.00053	1.00005	1.00000
1000	0.99944	1.01010	1.00005	1.00000
10000	0.99995	0.99994	1.00100	1.00001
100000	0.99999	0.99999	0.99999	1.00010

（４）

$\log(x) \cong x - 1$　の近似度を計算

x	① $\log_e(x)$	② $x-1$	②／①
0.90	−0.10536	−0.100	0.94912
0.91	−0.09431	−0.090	0.95429
0.92	−0.08338	−0.080	0.95944
0.93	−0.07257	−0.070	0.96458
0.94	−0.06188	−0.060	0.96969
0.95	−0.05129	−0.050	0.97479
0.96	−0.04082	−0.040	0.97986
0.97	−0.03046	−0.030	0.98492
0.98	−0.02020	−0.020	0.98997
0.99	−0.01005	−0.010	0.99499
0.995	−0.00501	−0.005	0.99750
0.999	−0.00100	−0.001	0.99950

（５）Simon (1955) や Barabasi & Albert (1999)、およびそれらを踏まえた論文では、優先的選択の仮定がベキ乗則生成の基礎になっている。

（６）(2-17)式から(2-21)式の論理は krugman (1996) による。

（７）(2-22)式から(2-25)式の論理は 鈴木武 (1998) による。

【参考文献】

H.A.Simon (1955) "On a Class of Skew Distribution Functions", Biometrika, Vol.42, No.3/4, p.425-440

P. Krugman (1996) "The Self-Organizing Economy", Blackwell, Cambridge, MA. （北村行伸・妹尾美起訳『自己組織化の経済学』東洋経済新報社, 1997）

A.L.Barabasi, R.Albert (1999) “Emergence of Scaling in Random Networks”, Science, Vol.286, p.509-512

R.Albert, A.L.Barabasi (2002) “Statistical Mechanics of Complex Networks”, Review of Modern Physics”, Vol.74, p.47-97

鈴木武（1998）『都市人口と順位との関係』経営志林、第 34 巻 4 号、p.105-118

鈴木武 (2007)『参入下限値を単位としたべき乗則生成モデル』、経営志林、第 44 巻 2 号、p.1-13